단기간에 완성하는 핵심 학습

대성 단기특강

수학 Ⅱ

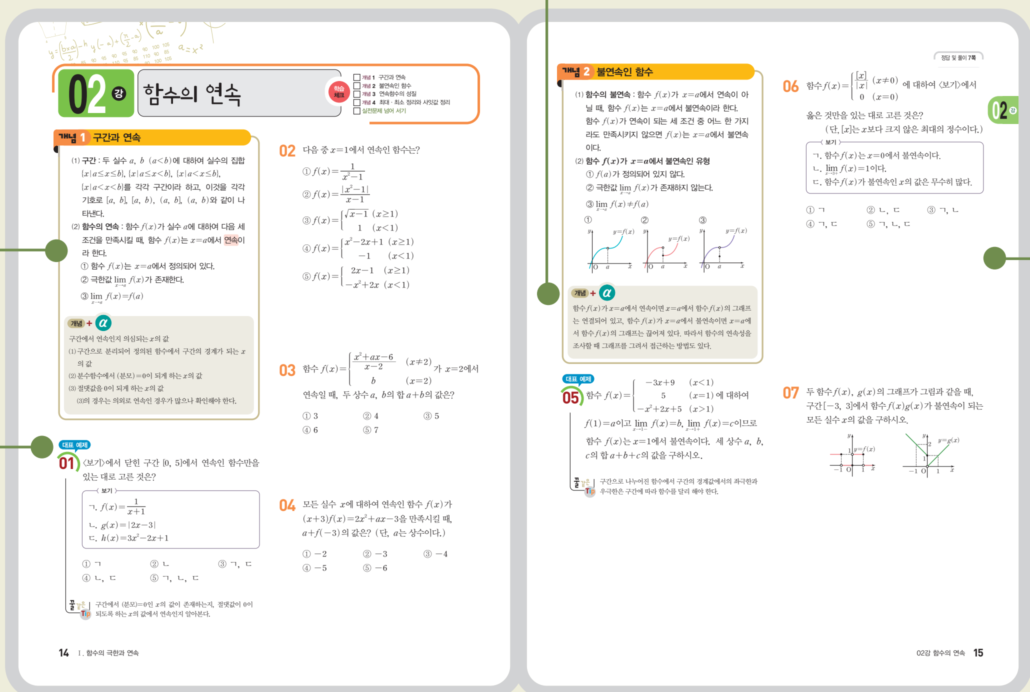
이 책의 구성과 특징

| 교과서 핵심 개념 정리 |

교과서 핵심 개념을 유형별로 정리하였습니다.

| 개념+α |

개념 추가 설명이나 공식 및 공식 유도, 실전 문제 풀이의 노하우 등 다양한 내용을 자세히 제시하였습니다.



| 대표 예제 |

교과서 예제, 유제 수준의 문제를 해결방법과 함께 제시하여 핵심 개념을 쉽게 익히도록 하였습니다.

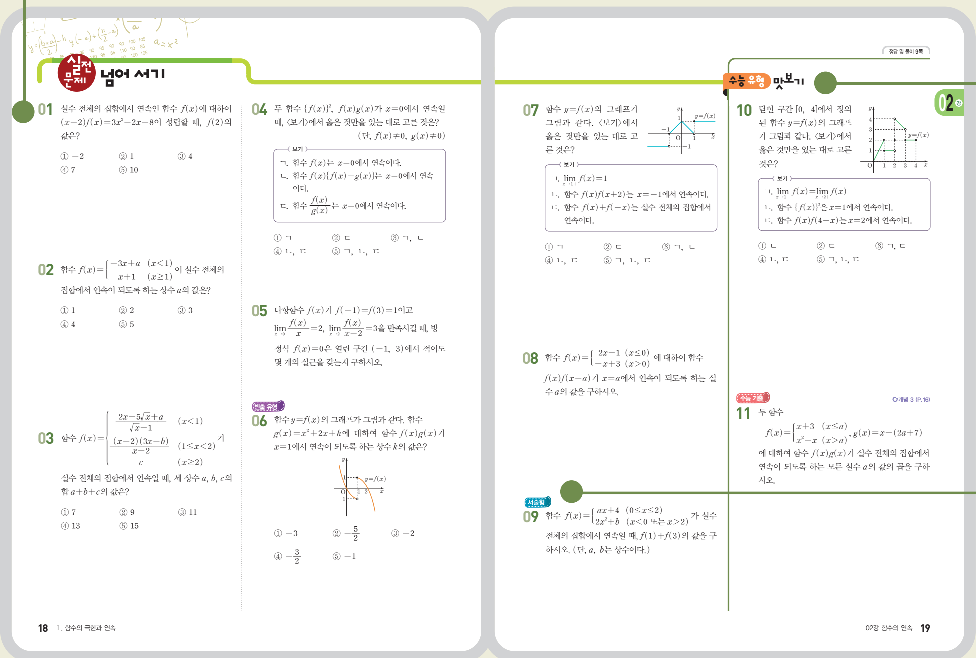
| 유제 |

쉬운 문제부터 개념의 이해를 완성하는 다양한 문제를 제시하여 기초 실력을 쌓을 수 있도록 하였습니다.

C O N S T I T U T I O N

| 실전문제 넘어 서기 |

등급 향상을 목표하는 학생들이 충분히 연습할 수 있도록
출제 빈도가 높은 문제를 난이도별로 제시하였습니다.

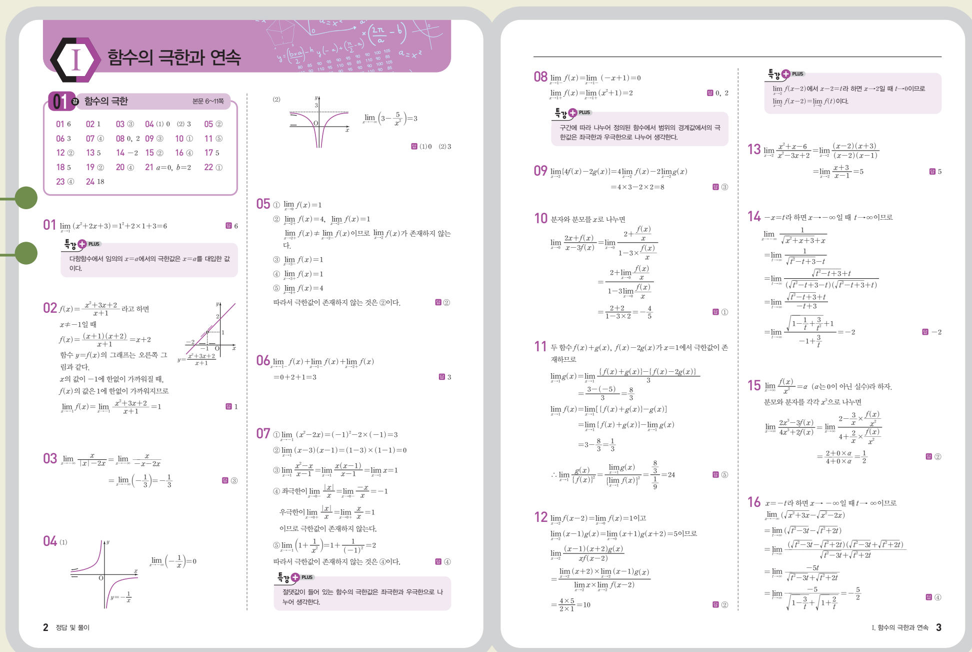


| 수능 유형 맛보기 |

수능에 대비하여 자신감을 얻고
실전에 적응할 수 있도록 하였
습니다.

| 서술형 |

서술형 문제를 출제하여 실제
시험에 대비할 수 있도록 하였
습니다.



| 정답 및 풀이 |

자세한 풀이와 다른 풀이를
제시하여 여러 가지 방법으
로 문제를 해결할 수 있도
록 하였습니다.

| 특강＋PLUS |

보충 설명이나 관련된 개념을
추가로 제시하여 활용할 수 있
도록 하였습니다.

이 책의 차례

I 함수의 극한과 연속

II 미분

C O N T E N T S

Ⅲ 적분

01 강 함수의 극한

학습 체크

- 개념 1 함수의 수렴과 발산
- 개념 2 좌극한과 우극한
- 개념 3 함수의 극한에 대한 성질
- 개념 4 함수의 극한값의 계산
- 개념 5 함수의 극한의 대소 관계
- 개념 6 함수의 극한과 미정계수
- 실전문제 넘어 서기

개념 1 함수의 수렴과 발산

(1) **함수의 수렴** : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 극한 또는 극한값이라 한다. 이것을 기호로 나타내면 $\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$ 또는 $x\to a$일 때 $f(x)\to\alpha$이다.

(2) **함수의 발산** : 함수 $f(x)$에서 $x\to a$일 때

① 양의 무한대로 발산 : $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$

② 음의 무한대로 발산 : $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

(3) $x\to\infty$ 또는 $x\to-\infty$일 때, 함수 $f(x)$가 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

개념 + α

(1) 함수가 정의되지 않는 곳에서도 극한값은 존재할 수 있다.
$x\to a$라는 것은 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워진다는 뜻이므로 함수의 정의역에 a가 반드시 속할 필요는 없다.

(2) $\lim_{x\to a} f(x)$가 존재한다고 해서 $f(a)$의 값이 반드시 존재하는 것은 아니며 $\lim_{x\to a} f(x)$와 $f(a)$가 각각 존재하지만 $\lim_{x\to a} f(x)\neq f(a)$일 수도 있다.

대표 예제

01 $\lim_{x\to 1}(x^2+2x+3)$의 값을 구하시오.

꿀같은 Tip | 함수에 $x=1$을 대입한다.

02 $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{x+1}$의 값을 구하시오.

03 $\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x}{|x|-2x}$에 대하여 옳은 것은?

① 극한값이 존재하고, 그 값은 0이다.

② 극한값이 존재하고, 그 값은 $\dfrac{1}{3}$이다.

③ 극한값이 존재하고, 그 값은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

④ ∞로 발산한다.

⑤ $-\infty$로 발산한다.

04 그래프를 이용하여 다음 극한값을 구하시오.

(1) $\lim_{x\to -\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$　　(2) $\lim_{x\to -\infty}\left(3-\dfrac{5}{x^2}\right)$

개념 2 좌극한과 우극한

(1) **좌극한** : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라 하고, 기호로 $\lim\limits_{x \to a-} f(x)=\alpha$로 나타낸다.

(2) **우극한** : 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라 하고, 기호로 $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=\beta$로 나타낸다.

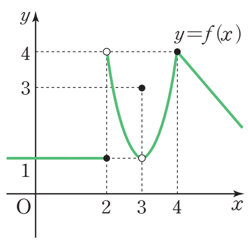
(3) 함수 $f(x)$에서 좌극한 $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$와 우극한 $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$가 모두 존재하고 그 값이 서로 같으면 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
또한 그 역도 성립한다.

$$\lim_{x \to a-} f(x)=\lim_{x \to a+} f(x)=\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \lim_{x \to a} f(x)=\alpha$$

개념 + α

일반적으로 다항함수는 좌극한과 우극한이 같다. 한편 절댓값이 포함된 함수나 구간을 나누어 정의된 함수는 좌극한과 우극한을 각각 확인한다.

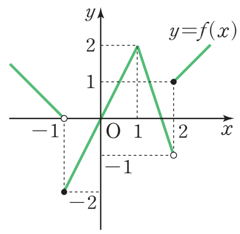
대표 예제 05 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 극한값이 존재하지 않는 것은?



① $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ ② $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ ③ $\lim\limits_{x \to 3-} f(x)$
④ $\lim\limits_{x \to 3+} f(x)$ ⑤ $\lim\limits_{x \to 4+} f(x)$

꿀 같은 Tip 우극한과 좌극한이 반드시 일치하는 것은 아니며, 이 경우에는 극한값이 존재하지 않는다.

06 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim\limits_{x \to -1-} f(x)+\lim\limits_{x \to 1-} f(x)+\lim\limits_{x \to 2+} f(x)$의 값을 구하시오.



07 다음 중 극한값이 존재하지 <u>않는</u> 것은?

① $\lim\limits_{x \to -1} (x^2-2x)$ ② $\lim\limits_{x \to 1} (x-3)(x-1)$
③ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-x}{x-1}$ ④ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$
⑤ $\lim\limits_{x \to -1} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

08 함수 $f(x)=\begin{cases} -x+1 & (x<1) \\ x^2+1 & (x \geq 1) \end{cases}$에 대하여 $\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$와 $\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값을 각각 구하시오.

개념 3 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)$
$=k\alpha$ (단, k는 상수)

(2) $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$
$=\alpha+\beta$

$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$
$=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{x\to a}\{f(x)g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)$
$=\alpha\beta$

(4) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
$=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $g(x)\neq0$, $\beta\neq0$)

개념 + α

(1) 함수의 극한에 대한 성질은 극한값이 존재할 때만 성립한다.

(2) 함수의 극한에 대한 성질은
$x\to a+$, $x\to a-$, $x\to\infty$, $x\to-\infty$
일 때도 성립한다.

대표 예제

09 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to2} f(x)=3,\ \lim_{x\to2} g(x)=2$$

일 때, $\lim_{x\to2}\{4f(x)-2g(x)\}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

꿀같은 Tip | 극한에 대한 성질에 의해 값을 계산한다.

10 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$일 때,
$\lim_{x\to0}\frac{2x+f(x)}{x-3f(x)}$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$
④ $-\frac{1}{5}$ ⑤ 0

11 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=3$, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2g(x)\}=-5$
일 때, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{\{f(x)\}^2}$의 값은?

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

12 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to0} f(x)=1,\ \lim_{x\to0}(x+1)g(x+2)=5$$

일 때, $\lim_{x\to2}\frac{(x-1)(x+2)g(x)}{xf(x-2)}$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

개념 4 함수의 극한값의 계산

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 극한

① $\dfrac{(\text{다항식})}{(\text{다항식})}$인 경우 : 분자와 분모를 각각 인수분해한 후 약분한다.

② 무리식인 경우 : 무리식을 유리화한 후 약분한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한 : 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 각각 나눈다.

(3) $\infty-\infty$ 꼴의 극한

① 다항식인 경우 : 최고차항으로 묶는다.

② 무리식인 경우 : 무리식을 유리화한다.

(4) $\infty\times 0$ 꼴의 극한 : $\infty\times c$, $\dfrac{c}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형하여 계산한다. (단, c는 상수)

개념 + α

(1) $\dfrac{0}{0}$, $\infty\times 0$에서 0은 숫자 0이 아니라 0에 한없이 가까워지는 것을 의미한다.

(2) $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 $\dfrac{\{\text{다항식 } f(x)\}}{\{\text{다항식 } g(x)\}}$의 극한 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서

① $\{f(x)$의 차수$\}>\{g(x)$의 차수$\}$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty \text{ 또는 } \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

② $\{f(x)$의 차수$\}=\{g(x)$의 차수$\}$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\{f(x)\text{의 최고차항의 계수}\}}{\{g(x)\text{의 최고차항의 계수}\}}$$

③ $\{f(x)$의 차수$\}<\{g(x)$의 차수$\}$일 때

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

대표 예제

13 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-3x+2}$의 값을 구하시오.

꿀같은 Tip | 분자와 분모를 인수분해하여 식을 정리한다.

14 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+3}+x}$의 값을 구하시오.

15 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$의 값이 0이 아닌 실수일 때, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3f(x)}{4x^3+2f(x)}$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

16 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x})$의 값은?

① -4 ② $-\dfrac{7}{2}$ ③ -3 ④ $-\dfrac{5}{2}$ ⑤ -2

개념 5 함수의 극한의 대소 관계

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때,

a에 가까운 모든 실수 x에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) 함수 $h(x)$에 대하여 $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$이다.

개념 + α

위의 (1), (2)의 가정의 부등식에서 등호가 없는 경우에도 결론은 성립한다. 즉,

(1) $f(x)<g(x)$이면 $\alpha \le \beta$이다.

(2) $f(x)<h(x)<g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$이다.

대표 예제

17 $f(x)$가 모든 양수 x에 대하여 부등식

$$5x+2 \le xf(x) < \frac{5x^2+4x+3}{x}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값을 구하시오.

꿀같은 Tip | 함수의 극한값을 구하는 문제에서 부등식이 나오면 주어진 식이 수렴할 수 있도록 조건식을 변형한다.

18 양의 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$가 부등식

$$\frac{1}{x^3+10} < x^2f(x) < \frac{1}{x^3+2}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} (5x^5+2)f(x)$의 값을 구하시오.

19 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 연립부등식

$$2x^2-1 \le (x^2+1)f(x) \le 2x^2+3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

20 $0<x<3$인 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 연립부등식

$$x^2-2x-3<(x^2-9)f(x)<2x^2-8x+6$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 3-} f(x)$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$